第 4 节 正态分布（★★☆）

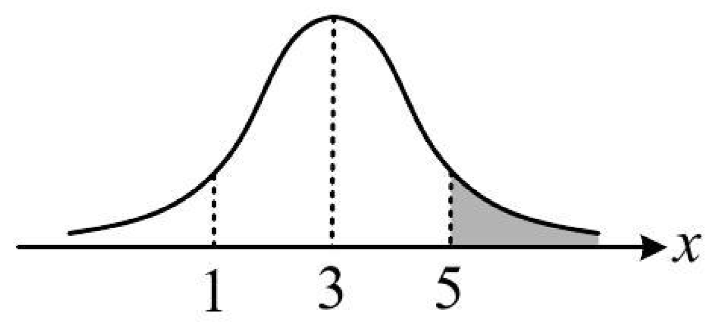
强化训练

1．（2022 • 江西模拟 • ★）设随机变量 $X\sim N(3,\sigma^2)$，若 $P(X>5)=0.2$，则 $P(1<X<3)=$_____.

答案：0.3

解析：本题的正态曲线如图，

$P(1<X<3)=P(3<X<5)=P(X>3)-P(X>5)=0.5-0.2=0.3$.



2．（2023 • 山东济南三模 • ★）已知随机变量 X，Y，其中 $X\sim B(6,\frac{1}{3})$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，$E(X)=E(Y)$，$P(|Y|<2)=0.3$，则 $P(Y>6)=$_____.

答案：0.2

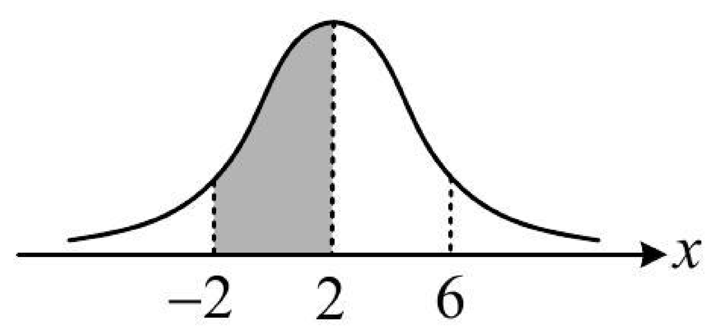
解析：Y 服从正态分布，要求区间取值概率，应先找到 Y 的均值 μ，可由 $E(X)=E(Y)$ 来求，

因为 $X\sim B(6,\frac{1}{3})$，所以 $E(X)=6\times\frac{1}{3}=2$，又 $E(X)=E(Y)$，所以 $E(Y)=2$，故 $\mu=2$，

接下来求 $P(Y>6)$，可画正态曲线来看，

如图，$P(|Y|<2)=P(-2<Y<2)=0.3$，由对称性，

$P(Y>6)=P(Y<-2)=0.5-P(-2<Y<2)=0.2$.



3．（2023 •山东潍坊一模 •★★）某学校共 1000 人参加数学测验，考试成绩 ξ 近似服从正态分布 $N(100,\sigma^2)$，若 $P(80\le\xi\le100)=0.45$，则估计成绩在 120 分以上的学生人数为（　　）

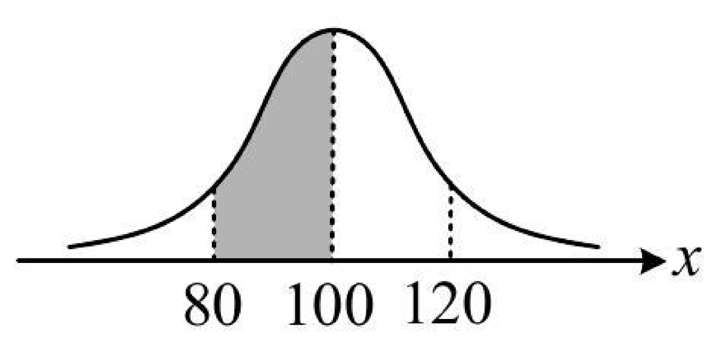
（A）25　（B）50　（C）75　（D）100

答案：B

解析：应先求出 $P(\xi>120)$，才能估计成绩在 120 分以上的人数，可画正态曲线来看，

如图，$P(X>120)=\dfrac{1-P(80\le X\le120)}{2}=\dfrac{1-2P(80\le X\le100)}{2}=\dfrac{1-2\times0.45}{2}=0.05$，

所以成绩在 120 分以上的学生人数约为 $1000\times0.05=50$.



4．（2023 • 安徽模拟 • ★★）小明统计了最近一段时间某超市冷饮的销售量 X，根据统计发现 X 近似服从

正态分布 $N(50,\sigma^2)$，且 $P(X\ge 20)=0.9$，已知该超市冷饮的销售量在区间 $[20,80]$ 内的有 80 天，则可以估计小明一共统计了_____天.

答案：100

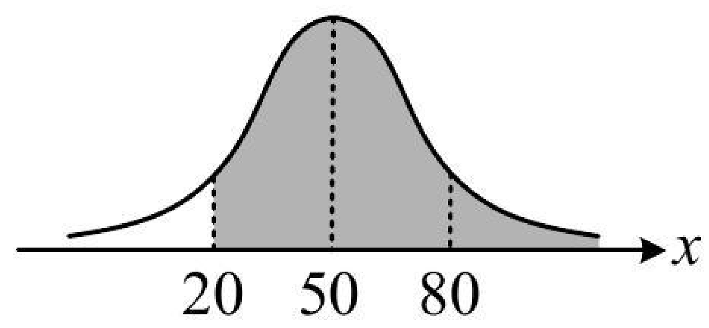
解析：已知 $[20,80]$ 内的天数，只需求出该区间的概率，就能求得一共统计了多少天，可画正态曲线来看，

如图，由题意，$P(X\ge 20)=0.9$，所以 $P(X<20)=1-0.9=0.1$，由对称性，$P(X>80)=P(X<20)=0.1$，

所以 $P(20\le X\le 80)=1-P(X<20)-P(X>80)=1-0.1-0.1=0.8$，

又该超市冷饮的销售量在区间 $[20,80]$ 内的有 80 天，

所以小明一共统计了 $\dfrac{80}{0.8}=100$ 天.



5．（2023 • 四省联考 • ★★★）某工厂生产的产品的质量指标服从正态分布 $N(100,\sigma^2)$，质量指标介于 99 至 101 之间的产品为良品，为使这种产品的良品率达到 95.45%，则需调整生产工艺，使得 σ 至多为_____.（附：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<2\sigma)\approx 0.9545$）

答案：$\dfrac{1}{2}$

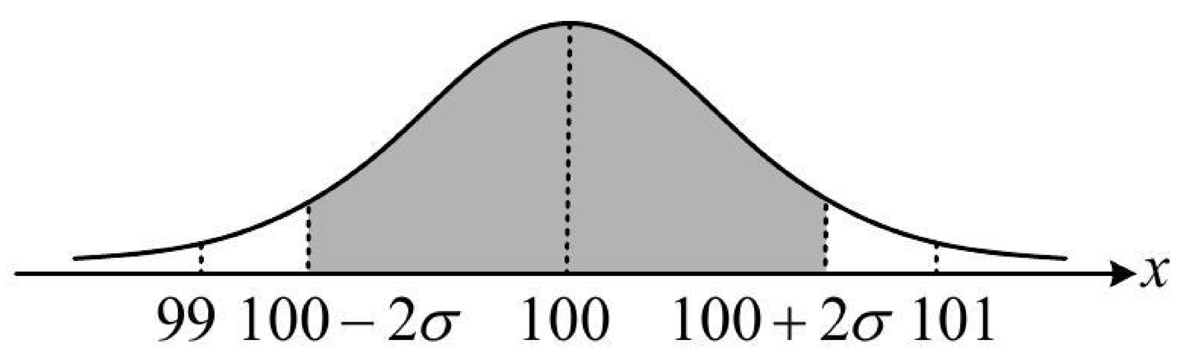
解析：注意到 95.45%恰好是 $P(|X-\mu|<2\sigma)$，故先把本题的 μ 代入此不等式，

由所给数据，$P(|X-\mu|<2\sigma)=P(-2\sigma<X-\mu<2\sigma)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$ ①，

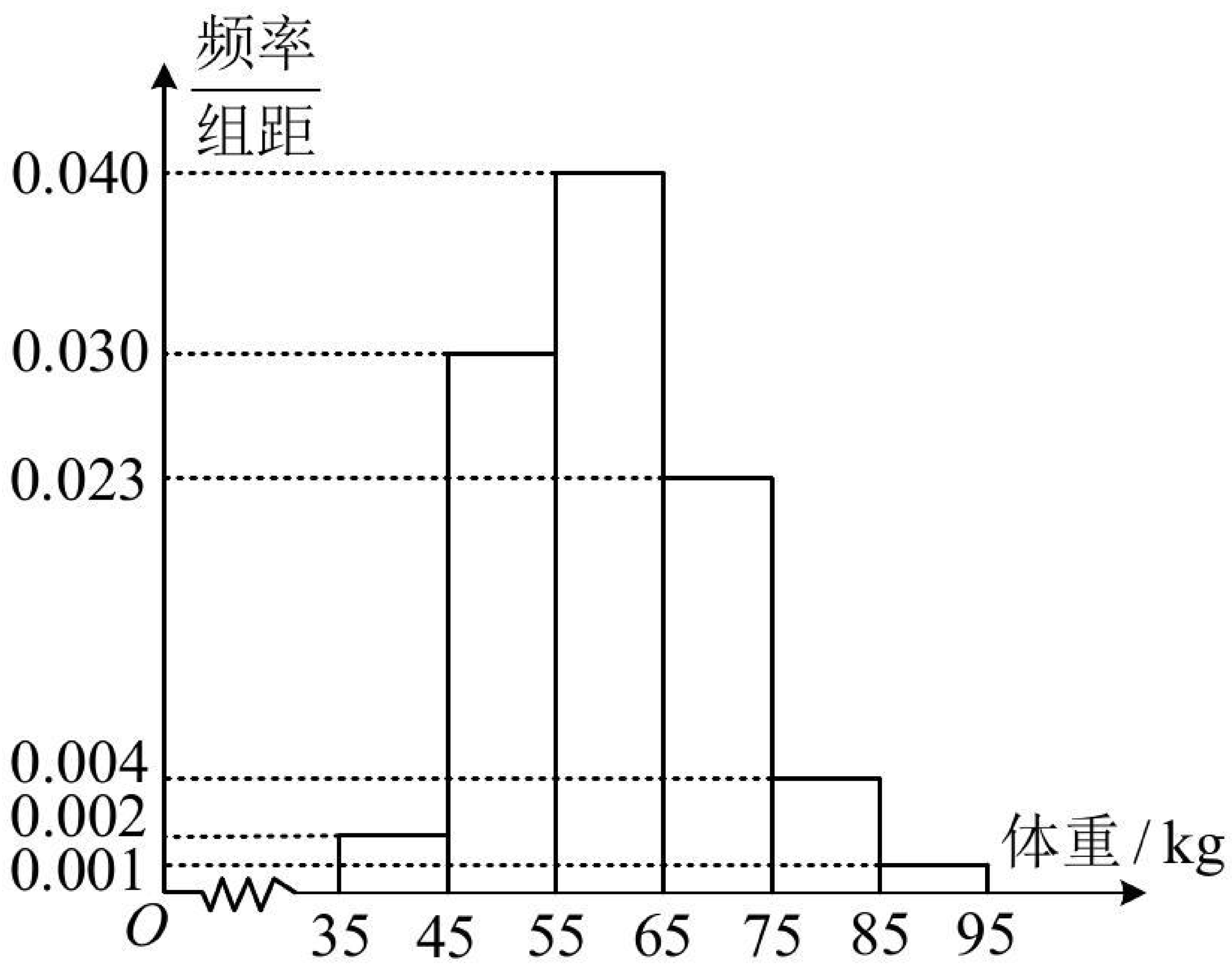
本题中，质量指标服从正态分布 $N(100,\sigma^2)\Rightarrow \mu=100$，代入①得：$P(100-2\sigma<X<100+2\sigma)\approx 0.9545$，

如图，故要使良品率达到 95.45%，即 $P(99<X<101)\ge 95.45\%$，此时 $(99,101)$ 应包含 $(100-2\sigma,100+2\sigma)$，

所以 $\begin{cases}100+2\sigma\le 101\\100-2\sigma\ge 99\end{cases}$，解得：$\sigma\le\dfrac{1}{2}$，故 σ 至多为 $\dfrac{1}{2}$.



6．（2023 • 安徽模拟 • ★★★）为贯彻落实《健康中国行动（2019~2030 年）》、《关于全面加强和改进新时代学校体育工作的意见》等文件的精神，确保 2030 年学生体质达到规定要求，各地将认真做好学生的体质健康检测. 某市决定对某中学学生的身体健康状况进行调查，现从该校抽取 200 名学生测量他们的体重，得到如下的样本数据的频率分布直方图.



（1）求这 200 名学生体重的平均数 $\bar{x}$ 和方差 s^2；（同一组数据用该区间的中点值作代表）

（2）由频率分布直方图可知，该校学生的体重 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2.

①利用该正态分布，求 $P(50.73<Z\le 69.27)$；

②若从该校随机抽取 50 名学生，记 X 表示这 50 名学生的体重位于区间 $(50.73,69.27]$ 内的人数，利用①的结果，求 $E(X)$.

参考数据：$\sqrt{86}\approx 9.27$，若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z\le\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<Z\le\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，$P(\mu-3\sigma<Z\le\mu+3\sigma)\approx 0.9973$.

解：（1）由图可知，$\bar{x}=40\times 0.02+50\times 0.3+60\times 0.4+70\times 0.23+80\times 0.04+90\times 0.01=60$，

$s^2=(40-60)^2\times 0.02+(50-60)^2\times 0.3+(70-60)^2\times 0.23+(80-60)^2\times 0.04+(90-60)^2\times 0.01=86$.

（2）①由题意，$\mu=60$，$\sigma^2=86$，所以 $\sigma=\sqrt{86}\approx 9.27$，

（要求 $P(50.73<Z\le 69.27)$，结合给的是 3σ 区间概率知应先找到 50.73 和 69.27 与 μ，σ 的关系）

因为 $\mu-\sigma=60-9.27=50.73$，$\mu+\sigma=60+9.27=69.27$，所以 $P(50.73<Z\le 69.27)=P(\mu-\sigma<Z\le\mu+\sigma)\approx 0.6827$.

②（题干没给该校共有多少学生，可认为该校学生人数很多，从中随机抽取 50 名，可以近似看成 50 重伯努利试验，故用二项分布求 $E(X)$ 即可）

由①可得，$X\sim B(50,0.6827)$，所以 $E(X)=50\times 0.6827=34.135$.